A&H
Revista de Artes y Humanidades

Un experimento con GeoGebra (App) para el desarrollo del pensamiento matemático

*Recibido: 8 junio 2016 * aprobado: 5 septiembre 2016*

Adrián Fabio Benítez Armas
Universidad Tecnológica de Oriental
benitezarmas@gmail.com

Resumen
El presente trabajo se centra en el uso de aplicaciones móviles (App), en particular se trabajó con GeoGebra como instrumento mediador. Partimos de las observaciones que hicieran Leinhardt Stain, y Zaslavsky (1990) con relación a la generación de gráficas. En este contexto consideramos que la construcción de gráficas es, desde una visión tradicional, el acto de generar una gráfica nueva a partir de datos obtenidos de una función dada (regla de correspondencia), de una tabla o de la construcción misma de una función algebraica que genere la gráfica. La construcción implica ir desde la generación de los datos (por la regla de asociación), pasando por la selección de los ejes y su escala, hasta la identificación de las unidades a utilizar.

Con la presencia de la tecnología digital, se ha permitido un análisis más rápido de las representaciones gráficas, logrando una dinámica diferente en el proceso de interpretación y construcción. Estudiar las gráficas generadas mediante una aplicación telefónica como GeoGebra, nos permite afirmar que las gráficas cartesianas generadas en este ambiente, son artefactos de mediación efectivos en el proceso de apropiación de los conceptos matemáticos.

Palabras clave: *Mediación, Geometría, conceptos, Matemáticas.*

Abstract
This paper focuses on the use of Mobile Applications (Apps), in particular we worked with GeoGebra as a mediator instrument. Our starting point were the observations Leinhardt, Stain, y Zaslavsky (1990) made regarding the generation of graphics. In this context we consider that the construction of graphs is, from a traditional view, the act of generating a new graph from data obtained from a given function (mapping rule), a table or the construction of an algebraic function generate the graph. The construction involves going from the generation of the data (association rule), through the selection of the axes and scale, to the identification of units used.

The presence of digital technology has enabled faster analysis of graphical representations, creating a different dynamic in the process of interpretation and construction. Studying the graphs generated by a mobile application such as GeoGebra allows us to say that the Cartesian graphs generated in this environment are artifacts of effective mediation in the process of internalizing mathematical concepts.

Keywords: *Mediation, Geometry, concepts, Mathematics.*

Podríamos decir que el origen de los instrumentos de mediación comenzó como una prótesis para hacer posible las actividades físicas del cuerpo, y cuyo resultado fue la transformación del medio ambiente y el establecimiento del escenario para futuras interacciones. Este hecho actuó sobre el objeto matemático, que al lograr su representación semiótica, nos permitió hablar de la experiencia matemática (Moreno-Armella y Hegedus, 2009). En este contexto encontramos a la tecnología digital aplicada a los dispositivos móviles, como mediadores que nos permiten elaborar una gráfica a partir de la ecuación. Creemos que al analizar la ecuación de la recta en su forma el alumno observa la representación gráfica de esta ecuación, relacionando el espacio gráfico con el espacio algebraico, manifestándolo en un movimiento cíclico entre espacios de interpretación, basados en la idea de Leinhardt, Stain, y Zaslavsky (1990) quienes plantean que existe un movimiento entre espacios del proceso interpretativo, donde el estudiante obtiene el significado de cualquiera de las representaciones del espacio de la regla algebraica y del espacio de la gráfica.

Nuestra investigación se centra en el uso de las llamadas Aplicaciones Móviles (App) en Sistemas Operativos Móviles como Android. En nuestro caso buscamos calculadoras graficadoras que nos sirvieron para mediar, entre la representación en el espacio de la regla algebraica y la representación en el espacio de la gráfica, encontrando a GeoGebra como una buena herramienta.

Problema

En la actualidad, es frecuente encontrar que el aprendizaje matemático continúa basado en procesos. Es a partir de éstos, que se presenta la resolución de problemas matemáticos como la generación de gráficas, sin embargo, relacionar una representación gráfica con su representación algebraica, resulta complejo (Leinhardt et al., 1990). Es por esto que ahora pretendemos abordar los conceptos, apoyándonos en herramientas tecnológicas actuales, como GeoGebra, y es de aquí que surge el cuestionamiento de la investigación ¿Cómo se incorporan a nuestra cognición los conceptos de pendiente m y ordenada en el origen b de la ecuación de la recta?

Objetivo general

Se estudia el proceso de incorporación a nuestra cognición de los conceptos pendiente m y ordenada en el origen b, de la ecuación de la recta, mediante el uso de dispositivos móviles, en particular GeoGebra.

Justificación

La actual dinámica relacionada con las formas de aprendizaje, nos obliga a replantearnos el esquema de enseñanza. Consideramos que al mantener una visión centrada en los procesos, ya sean aritméticos, algebraicos, etc., se promueve el aprendizaje basado en la memorización o centrada en la adquisición de conocimiento, percibiendo el desarrollo como la memorización de los procesos por sí mismos. Desde nuestra perspectiva, esta postura no nos permite percatarnos de las aptitudes que poseemos y de las posibilidades que tenemos al desarrollar el pensamiento matemático y la cognición.

Nosotros planteamos que el uso de GeoGebra como instrumento de mediación en su aplicación telefónica, permite hacer del aprendizaje una experiencia práctica, con la posibilidad de centrarnos en los conceptos que fundamentan los temas, y con ello se promueve la adquisición de una serie de competencias en el campo formativo del pensamiento matemático y del desarrollo cognitivo.

Diferentes autores como Clement (1989), Zubieta y Moreno (1996), Radford (2009), Suárez (2008) han abordado el problema de las representaciones gráficas desde perspectivas diversas. Desde 1981 Freudenthal ya considera que la tecnología digital influye en la educación ubicándola como "una potente herramienta para despertar e incrementar el entendimiento matemático" (2001, p.19). A partir de 1992, con las contribuciones de Kaput, Noss y Holys, los trabajos adquieren mayor importancia al plantear cuestionamientos enfocados a explorar cómo la actividad cognitiva se modifican como resultado de la interacción del estudiante con la tecnología. Así Kaput, Noss y Hoyles (2002) proponen utilizar tecnología digital para asociar las gráficas con eventos encarnados. Mientras Radford (2009) nos da muestra de la dificultad que los alumnos reportan para la conceptualización del espacio y tiempo por medio de las gráficas de movimiento.

Ferrara y Savioli (2011) reportan los resultados de una investigación realizada con estudiantes de 7 años de edad, quienes participaron en la interpretación y uso de gráficas a través del dibujo y lectura generadas por un sensor de movimiento donde se analizó la producción de sus textos y dibujos. Por su parte Benítez (2012), presenta un estudio de las gráficas generadas mediante un sensor de movimiento, en donde analiza las características que tiene el proceso de entendimiento del movimiento uniforme, a través de la tecnología digital. Flores (2007) observa las dificultades que tienen los estudiantes con la construcción e interpretación de gráficas. Su trabajo parte de las formas básicas de graficación y toma como marco de referencia el trabajo de Leinhard et al. (1990).

Leinhardt et al. (1990), señalan que el entendimiento de una gráfica debería ser expresada, más que en términos matemáticos, mediante esquemas cualitativos apoyados en el sentido común. Rivière (2002) asegura que el pensamiento no sería una función formalmente determinada por la estructura de la extensión del cuerpo humano, sino por la actividad externa, objetiva, en relación a otros cuerpos.

Por su parte Quintero y Salinas (2015) estudian cómo el ambiente de participación activo y colaborativo estimulado por el uso del recurso tecnológico SimCalc, es un espacio propicio para evidenciar la construcción de significados matemáticos. De igual modo Salinas, Quintero y Fernández-Cárdenas (2016) exploran cómo la tecnología digital proporciona el significado de las representaciones matemáticas, a través de la exploración activa que proporciona el aprendizaje situado.

Las ideas expuestas se centran fundamentalmente en la investigación del entendimiento de las gráficas, mediante estrategias centradas en esquemas cualitativos a través de instrumentos de mediación diversos, como el uso del cuerpo y de tecnología digital. En nuestro caso en particular, consideramos como instrumento de mediación el uso de aplicaciones telefónicas y en particular estamos hablando de GeoGebra. Con ayuda de esta aplicación en su versión telefónica, se pudo observar cómo el alumno (guiado por el profesor y con el diseño del escenario en el aula) descubrió el significado de las componentes y las actividades y acciones que los participantes desarrollaron para generar los datos de análisis en el estudio, le permitieron relacionar la gráfica con la representación algebraica.

Marco conceptual

Los sistemas de escritura y las notaciones numéricas son tecnologías (simbólicas) tan arraigadas a nuestra vida que difícilmente son reconocidas como tecnologías, dada la familiaridad que nos vincula a ellas. Sin embargo, tal vez sean éstas los ejemplos más significativos de cómo una tecnología puede afectar irremediablemente nuestro funcionamiento cognitivo. Lo que comenzó como una prótesis para hacer posible las actividades físicas del cuerpo, finalmente transformó el medio ambiente y planteó el escenario para futuras interacciones, donde el objeto matemático se introdujo cuando existió de él, una representación semiótica permitiéndonos hablar de la experiencia matemática (Moreno-Armella y Hegedus, 2009).

El cerebro humano depende profundamente de los recursos culturales para su funcionamiento cognitivo. Estos recursos no son un añadido a un cerebro que funciona sin ellos, sino que son co-extensivos de la actividad mental, la constitución del hombre moderno aparece como un producto cultural y no solamente biológico (Geertz, 1973).

Pero no podemos hablar de la cultura sin hablar al mismo tiempo de los instrumentos de mediación, tanto materiales como simbólicos. Bruner afirma que “el empleo de la mente depende de la capacidad que ha mostrado para desarrollar y usar herramientas para expresar y amplificar sus capacidades” (1995, p. 137). No ha sido un homínido ya desarrollado cerebralmente el que ha creado los fundamentos de la vida social sino, más bien, añade Bruner, “la evolución del sistema nervioso humano fue algo que necesitó de recursos externos (herramientas e instrumentos) para expresar todo su potencial" (1995, p. 138).

La incorporación de una tecnología al ámbito de la educación es algo que debe hacerse tomando en cuenta el principio de mediación instrumental: todo proceso de aprendizaje está mediado por un instrumento material y/o simbólico. Las tecnologías, en especial las simbólicas, pueden servir de amplificadores y re-organizadores de la actividad intelectual. En nuestro estudio, GeoGebra nos permitió observar alguna componente gráfica de nuestro interés sin cambiar su estructura. Sin embargo, cuando hacemos un análisis conjunto entre el lugar geométrico y el valor de una componente algebraica, encontramos la posibilidad de percibir lo que antes no era posible, accedemos a otro nivel de la realidad gráfica que ahora es cualitativamente distinto, generando con ello la posibilidad de un conocimiento nuevo que gravita en la re-organización del pensamiento.

Finalmente, reiteramos que la incorporación de instrumentos de mediación no se limita a facilitar una acción, que incluso podría realizarse sin éstos; podríamos asegurar que es mediante su inclusión, que el proceso de comportamiento y las herramientas psicológicas alteran toda la influencia y la estructura de las funciones mentales (Wertsch, 1993).

Ahora bien, Leinhardt et al. (1990) se refieren a la interpretación y a la construcción como acciones completamente diferentes. La interpretación es la acción que le permite al alumno darle un significado a la gráfica o a una porción de ella, a una función o a una situación. La interpretación depende y requiere de la reacción ante una porción de datos. En tanto la construcción se refiere a la acción de generar partes nuevas no obtenidas a partir de la información existente. Por otra parte la acción de interpretar y construir puede llevarse a cabo al interior de cualquiera de los espacios.

La interpretación depende de lo que la gráfica represente, y de su posibilidad de ser expresada por una ecuación o por un conjunto de pares ordenados. En este contexto las gráficas pueden traducirse para su interpretación o complemento de interpretación, dentro de los espacios simbólicos delimitados. El acto de traducción es poco frecuente aún en el trabajo escolar matemático, pero es fundamental para la educación formal.

En el interior del espacio simbólico, los elementos que la componen –como la interpretación- tal vez puedan convertirse hasta cierto punto en elementos dinámicos (ver Figura 1). Podemos encontrar por tanto que la tarea de interpretación puede estar centrada en el espacio particular de la regla algebraica. Por ejemplo, cuando un alumno trabaja con la ecuación de la recta, igualando la variable para despejarla; en este caso está trabajando con la regla algebraica dentro del espacio algebraico. De igual manera, el alumno puede observar en el espacio de interpretación gráfica, el lugar geométrico donde la recta corta al eje y. Todo esto se lleva a cabo en el sistema de coordenadas en que se halla en el espacio de interpretación gráfica.

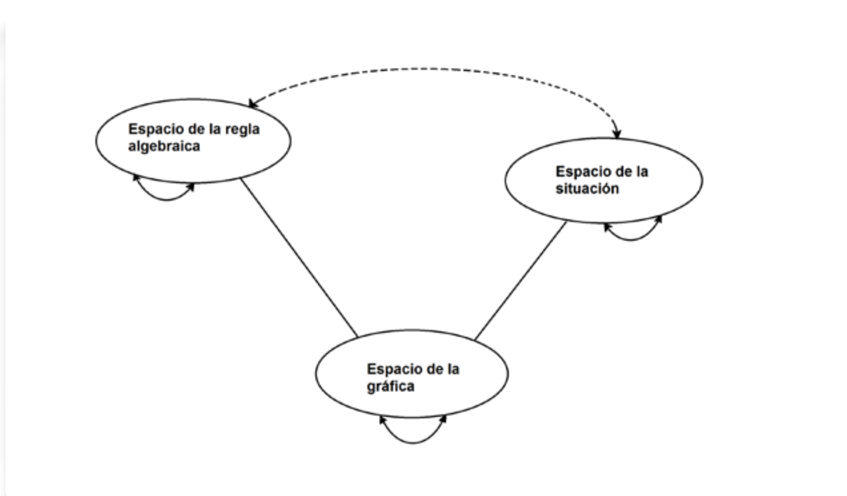

Figura 1. Movimiento entre espacios en una acción de interpretación. Fuente: Interpretada (Leinhardt et al., 1990, p. 11)

En nuestra investigación, en un esquema delimitado a la ecuación de la recta, es muy frecuente que se establezca un intercambio (traducción) simultánea entre el espacio de la representación algebraica y el espacio de la gráfica. Incluso Leinhardt et al. (1990) afirman que entre el espacio de la representación de la gráfica y el espacio de la regla algebraica se da la traducción. La traducción se refiere, entonces, al acto de reconocer la misma gráfica y/o función, considerando otras formas de representación. Esta tarea consiste en realizar el enlace entre diferentes modos de representación, por ejemplo, la más frecuente es la traducción de la representación algebraica a la representación gráfica.

Proceso metodológico

La investigación pretende hacer un análisis del proceso de incorporación a nuestra cognición de los conceptos pendiente *m* y ordenada en el origen *b*, de la ecuación de la recta, con el fin de contribuir a la fundamentación del uso de tecnología digital en el aprendizaje matemático. Por una parte nos centraremos en la revisión del nivel de comprensión de conceptos matemáticos, y por otra parte revisaremos las propuestas teóricas generadas en el tema con la intención de agregar nuestra percepción.

La aplicación móvil seleccionada fue GeoGebra, la cual cubre las necesidades de esta investigación, ya que permite la generación de la gráfica de ecuaciones de la recta en su forma $y=mx+b$. Aprovechando las tecnologías actuales, generamos en este contexto un lugar especial equipado con GeoGebra a través de su aplicación telefónica. Al espacio lo llamamos *laboratorio de matemáticas*, y en él se mantuvo el control del trabajo experimental realizado con los alumnos. Con la ayuda de los graficadores en la aplicación telefónica se pudo observar cómo el alumno guiado por el profesor, descubrió el significado de las componentes *m* y *b*, que son el punto medular del estudio, demandó además el diseño del escenario, las actividades y acciones que los participantes deberían desarrollar para generar los datos de análisis en el estudio, y las manifestaciones que dieran muestra de la modificación cognitiva que el estudiante reporta al momento de analizar la relación de la gráfica, con la representación algebraica a través del uso de GeoGebra.

En primera instancia, comenzamos con un proceso de familiarización de las aplicaciones usadas, descubriendo algunas cualidades importantes o restricciones que poco a poco nos permitieron usar la aplicación. Los participantes, alumnos del primer cuatrimestre de la carrera Agricultura Sustentable y Protegida de la Universidad Tecnológica de Oriental, tienen una edad promedio de dieciocho años. Sus nombres, con fines de identificación en la investigación, son: Sebastián, Juan, Nancy, Diana, Diana2. Con respecto al rendimiento académico reportado, se consideró que las alumnas Diana y Diana2 son las mejores, mientras que Sebastián, Juan y Nancy son alumnos poco disciplinados y reportados con bajo éxito académico.

En el diseño experimental, plantear preguntas a los participantes y cuestionar sus respuestas permite entender cómo conciben las gráficas en relación a las actividades que se desarrollan. Las preguntas fueron formuladas en función de las respuestas y maneras de contribución que manifestaron, siempre orientadas con el fin de entender cómo conciben las gráficas en este escenario. Sus respuestas permitieron entender cómo conciben los indicadores que le dan sentido y relación a las gráficas con las representaciones algebraicas. Una cámara de video registró las acciones y diálogos de los participantes.

Por otra parte, Oriental es una comunidad no urbana con una población estimada en 2010 de 16,575 habitantes, con una densidad de 68.97 habitantes por kilómetro cuadrado. Pertenece al Programa para el Desarrollo de Zonas Prioritarias y es considerado un municipio con marginación muy alta y alta en municipios de media marginación (SEDESOL, 2015).

FIGURA 2. DISEÑO EXPERIMENTAL. FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

El escenario experimental se ilustra en la Figura 2 los sujetos siguiendo las instrucciones del profesor, hicieron las gráficas que se les solicitaron analizando las componentes algebraicas, comparando los indicadores gráficos con los valores de b y m. Así, al relacionar la representación algebraica con la representación gráfica, encontraron los indicadores que determinan el significado gráfico de las funciones.

La realización del experimento implica organizar las actividades de manera consecuente, para ello se dividieron en tres momentos:

1. Explorando el funcionamiento de la aplicación
2. Los alumnos descubren a la constante b en su lugar geométrico
3. Los alumnos descubren a la constante m en su lugar geométrico

El experimento

1. Explorando el funcionamiento de la aplicación

Se les explico a los alumnos como es el funcionamiento de la aplicación (GeoGebra). Bajo la guia del profesor, los alumnos fueron explorando las funciones, con el fin de que cada alumno pruebe cómo generar gráficas con la herramienta. Ellos generaron gráficas en el plano cartesiano a través de la representación con las aplicaciones telefónicas (ver Figura 3).

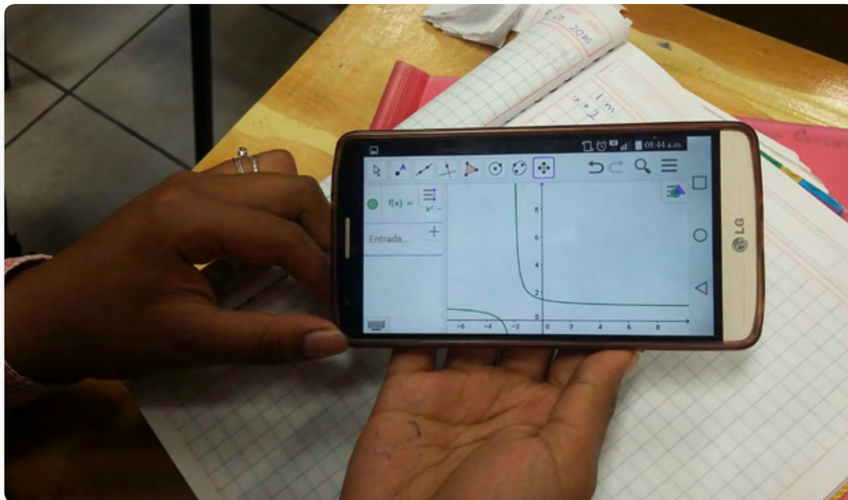

Figura 3. Explorando el funcionamiento de la aplicación. Fuente: elaboración propia

2. Los alumnos descubren a la constante *b* en su lugar geométrico

De la ecuación de la recta en su forma $y=mx+b$, se les pidió en un principio que graficaran en el sistema cartesiano virtual, la función $y=2x+3$, acentuándose la relación que hay entre el valor de $m=2$ y de $b=3$, según la forma de la ecuación de la recta.

$$y=mx+b \qquad\qquad y=2x+3$$

Posteriormente se les solicitó que asignaran valores diferentes *a b* y que fueran relacionando el número asignado con el lugar geométrico de cada función. Los valores sugeridos para el ejercicio, fueron:

$$b=3,\ b=4,\ b=5,\ b=0,\ b=-1\ \ b=-2\ b=-3,\ b=-4, etc.$$

En este experimento, los alumnos reconocieron de forma paulatina y guiado por el profesor, la relación entre el número de *b* y su impacto en el lugar geométrico.

Una vez que realizaron el ejercicio en diversas ocasiones, se le hizo la siguiente pregunta a través de un cuestionario:

- ¿Qué significado gráfico tiene el valor de b?

Las respuestas fueron:

- Sebastián: "Sería su significado de *b* el que determina el punto de intersección en el eje *y*".

- Juan: “Que *b* se representa en el eje de las (*y*)= como positivo y va hacia arriba y cuando es positivo “*b*” se va en el eje de la –*x* y cuando es –*b* se va acia abajo y es -2”.
- Nancy: “Pues su significado gráfico de *b* sería que es el que determina en donde debe nacer el eje *x* para su intersección con el eje *y* es el punto de intersección en el eje *y*”.
- Diana: “*b* cambia la posición de la recta (línea) que se forma de positivo a negativo”.
- Diana2: “El significado de ‘*b*’ indica la posición de la recta, el punto de intersección con el eje *y*”.

Interpretación
En el caso de Sebastián, Nancy y Diana2 hicieron claramente la asociación de la constante *b* con el lugar geométrico. El número les representa intuitivamente una condición gráfica, es el punto de intersección con el eje *y*. La acción de coordinar el número con el lugar geométrico (intersección con el eje *y*) implica un proceso de asociación entre los signos y su significado gráfico, lo cual es un ejercicio cognitivo fundamental en el proceso de comprensión del tema, es un indicador del entendimiento.

Nancy mostró la ubicación del significado gráfico del valor de *b*, hizo referencia a él señalándolo, es interesante el uso del lenguaje de la alumna, es una forma de identificación del concepto, haciendo uso de los referentes léxicos con los que está familiarizada. Complementa diciendo “es el punto de intersección con el eje *y*”. Igualmente observamos que es capaz de coordinar el número con el lugar geométrico, asocia los signos y su representación gráfica, lo cual es un indicador del entendimiento. Si bien es cierto, Nancy no es explícita en su texto, sí ha logrado relacionar el valor de *b* con la posición de la recta.

Conjeturamos que los alumnos son capaces de hacer la transferencia de los dos modelos de representación que se están relacionando, porque ha comprendido las características generales de la escritura de la gráfica a través del significado que tiene la constante *b* en el lugar geométrico a través del uso de aplicaciones telefónicas.

3. Los alumnos descubren a la contante *m* en su lugar geométrico

Ahora los alumnos descubren de la ecuación de la recta en su forma *y=mx+b*, el significado que tiene el valor de *m*, de igual manera son guiados por el profesor. En este experimento se les pidió que graficaran nuevamente en el sistema cartesiano virtual, la función *y=2x+3*, pero en este caso centrándose en los cambios que se generarán en el valor de m, según la forma de la ecuación de la recta.

En este momento se les dio la posibilidad de explorar las dos formas de representación libremente, solo centrándose en el valor de *m*. Los valores sugeridos para la exploración fueron: *m=3, m=4, m=5, m=0, m=-1, m=-2, etc.* En este experimento, los alumnos fueron reconociendo de forma paulatina, guiado por el profesor, la relación entre el número *m* y su impacto en el lugar geométrico.

Una vez que hicieron el ejercicio en diversas ocasiones, se les aplicó un cuestionario con la siguiente pregunta:

- ¿Qué significado gráfico tiene el valor de m?

Las respuestas fueron:

- Sebastián: "*m* es el la inclinación y punto de intersección donde pasan todas las rectas".
- Juan: "Es el valor de los ejes *x* dependiendo su valor es su ubicación en el eje de las *x* y '*y*' solo es el punto para donde todas se intersectan".
- Nancy: "Que *m* es el punto de intersección por el que pasan (todos los factores) el eje *y* de las rectas".
- Diana: "El valor de *m* cambia la inclinación de la línea".
- Diana2: "Es la inclinación de la recta, dirigidos al eje *y*".

Interpretación

En este caso, Sebastián, Diana y Diana2 se refirieron de forma clara a la asociación de la constante *m* con el lugar geométrico. El número lo asocian con la inclinación de la recta, les representa intuitivamente una condición gráfica. La acción de coordinar el número con el lugar geométrico (inclinación de la recta) implica un proceso de asociación entre los signos y su representación geométrica, ejercicio cognitivo fundamental en el proceso de comprensión.

Por otra parte, tenemos que Nancy y Juan interpretaron el valor de *m* como un punto de intersección de las rectas. Específicamente Nancy escribe "Que *m* es el punto de intersección por el que pasan (todos los factores) el eje *y* de las rectas" y Juan comenta "… solo es el punto por donde todas se intersectan". Evidentemente los alumnos han dado muestra de una confusión al hacer la relación del valor *m* con el lugar geométrico. Por ello tratamos de reconstruir el origen de su confusión.

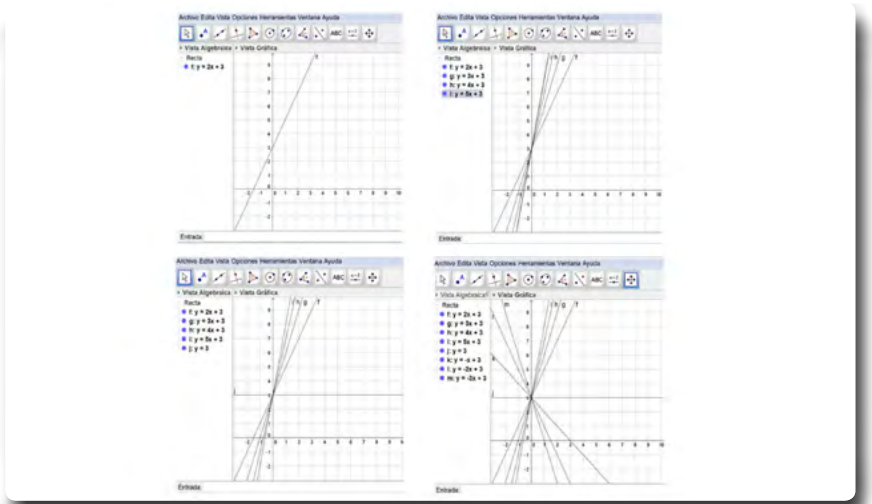

Figura 4. Gráfica de secuencia de lugares geométricos. Fuente: elaboración propia

La secuencia de lugares geométricos (ver Figura 4) corresponde al seguimiento metodológico que los alumnos hicieron para el ejercicio. Podemos observar que agregaron las funciones sobreponiendo las gráficas; en este contexto, lejos de relacionar el valor de *m* con los cambios de pendiente, los alumnos relacionaron el valor de *m* con la inmovilidad del punto de intersección, a pesar de que tal intersección ya había sido un concepto tratado. Indudablemente el proceso cognitivo no es un andar lineal en el que se acumulen experiencias y conclusiones. El proceso cognitivo es un camino sinuoso, en donde la generación de conceptos se edifican y reedificación paulatinamente y con frecuentes retrocesos.

Conclusión

Las gráficas que los alumnos analizaron les permitieron asociar la representación gráfica con el significado algebraico de las componentes *m* y *b* de la ecuación $y=mx+b$. Durante el experimento, pudimos observar cómo fueron capaces de descubrir paulatinamente la relación entre las dos formas de representación, hasta llegar a reconocer las características de sus respectivos significados. Esta nueva situación nos permitió concluir que el proceso de adquisición de significados matemáticos es un proceso cognitivo, en el que la generación de conceptos se asimila y re-asimila paulatinamente con frecuentes retrocesos. Aclarando que esto no significa necesariamente que el alumno sea capaz de comprender un concepto y asociar sus formas de representación, pero sí que puede percatarse de estas relaciones si se le brinda la posibilidad de análisis en espacios alternativos. Consideramos que al crear nuevos escenarios a través del uso de tecnología, se genera en el alumno la necesidad de resignificar y de replantear el símbolo, comprendiendo el concepto de manera más efectiva y asertiva, hipótesis que tendremos que estudiar.

Asociar la representación gráfica con el significado algebraico de las componentes *m* y *b* es un camino mucho más parecido al proceso dialéctico. Lo que en un principio resultó para el alumno una ecuación sin significado y sin relación con la representación geométrica, en este nuevo escenario se convirtió en una expresión que guarda una serie de indicadores simbólicos de los que él ya tiene referentes que le permitirán ir creciendo en relación con las representaciones matemáticas.

Para nosotros, la cognición es un proceso de interpretación evolutiva y sin fin. En este contexto los alumnos pudieron atribuir un significado a la marca semiótica de las constantes *m* y *b*, que son ahora un concepto con el que ya han tenido un primer encuentro y con el que ahora podrán lidiar. El hecho de poder localizarlos y hablar de ellos, determinando cuál es el significado que les corresponde en la gráfica, se debe a que más allá del signo que represente el concepto, los han experimentado y ahora tienen un referente más que es parte de su experiencia gracias a las aplicaciones telefónicas. Los significados atribuidos son en función de los conceptos que ellos ya han asimilado con anterioridad.

Los alumnos ahora están en mejores condiciones para desarrollar un trabajo de interpretación entre el espacio de la situación y su forma de representación en el sistema cartesiano con tecnología digital. Ahora puede aproximarse a una traducción, bidireccionalmente, las condiciones de la representación algebraica con la representación cartesiana.

La posibilidad de coordinar la constante *m* y *b* en la representación algebraica $y=mx+b$, con su representación geométrica les permite la asociación de los signos. La acción de asociar es un ejercicio cognitivo fundamental en el proceso de comprensión de los conceptos matemáticos, ya que es un indicador del entendimiento. Conjeturamos que ahora los alumnos están en mejores condiciones para trasladar el concepto en diferentes direcciones entre el espacio de la representación algebraica, hacia la representación en el plano cartesiano (geométrica).

Referencias:

Benítez, A. F. (2012). E*studio sobre la variación y el cambio: Mediación del sensor de movimiento.* (Tesis doctoral inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Bruner, J.S. (1995). La Educación como Invento Social. *En Desarrollo Cognitivo y Educación* (2a Edición). Madrid: Ediciones Morata.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesiangrephing. *Focus on Learning Problems in Mathematicas.* 11, 1-2. Recuperado de http://www-unix.oit.umass.edu/~clement/pdf/concept_of_variation.pdf

Ferrara, F. y Savioli, K. (2011). Young Students Thinking About Motion Graphs. En Ubuz, B. (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Ankara, Turkey: PME. Vol 2, Pp. 337-344.

Flores, C. (2007). Formas Básicas de Graficación y su Simulación con Transductores. En *Repositorio Digital Institucional. Instituto Politécnico Nacional*. Recuperado de http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/2822

Freudenthal, H. (2001) Problemas fundamentales de la educación matemática. *ContactoS* 42 (pp. 11 – 22). Recuperado de file:///C:/UPAEP/Revista%20Artes%20y%20Humanidades/Freudenthal.pdf

Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures*. [Versión DX Reader]. Recuperado de file:///C:/UPAEP/Revista%20Artes%20y%20Humanidades/Geertz_Clifford_The_Interpretation_of_Cultures_Selected_Essays.pdf

INEGI (2013). *Unidad de Microrregiones*. Cédulas de Información Municipal. Recuperado de http://www.microrregiones.gob.mx/zap/datGenerales.aspx?entra=pdzp&ent=21&mun=108

Kaput, J., Noss, R., y Hoyles, C. (2002). Developing New Notations for a Learnable Mathematics in the Computational Era. En Lyn D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum associates, NJ, (51-75).

Leinhardt, G., Stain, M. y Zaslavsky, O. (1990). Functions graphs and y graphing: Taks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, Spring. 60, 1, 1-64.

Moreno-Armella, L. y Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. ZDM, T*he International Journal of Mathematics Education*. 41 (4), 505 – 519. Recuperado de http://biblioteca.cinvestav.mx/indicadores/texto_completo/cinvestav/2009/163499_1.pdf

Quintero, E. y Salinas, P. (2015). Producción multimodal de signos en la apropiación de relaciones entre función y derivada. 5, 739 – 762. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/310/31045570042.pdf

Radford, L. (2009). No! He starts walking backwards'': interpreting motion graphs and the question of space, place and distanca. ZDM, *The International Journal of Mathematics Education*. Vol. 41 (4), 2009. Recuperado de http://liaison.laurentian.ca/NR/rdonlyres/DE85FC0B-6436-48C6-8968-352B83AE25CD/0/ZDM2009Graphs.pdf

Rivière, A. (2002). *La Psicología de Vygotski.* España: Antonio Machado Libros.

SEDESOL (2015). *Catálogo de Localidades.* Secretaría de Desarrollo Social. Ciudad de México. Consultado el 24 de mayo de 2016, http://www.microrregiones.gob.mx/catloc/LocdeMun.aspx?tipo=clave&campo=loc&ent=21&mun=108

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico.* (Tesis doctoral inédita) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Salinas, P. Quintero, E. y Fernández-Cárdenas, J. (2016). Fostering Dialogue in the Calculus Classroom Usering Dynamic Digital Technology. *Digital Experiences in Mathematics Education*. (1), 21-49. Consultado el 7 de septiembre de 2016, http://link.springer.com/article/10.1007/s40751-016-0013-9.

Wertsch, J. V. (1993). *Voces de la Mente, Un Enfoque Sociocultural para el Estudio de la Acción Mediada*. España: Aprendizaje Visor.

Zubieta, G. y Moreno, L. (1996). Sobre el Número y la Variación. Hitt Espinoza, F. (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa.* México: Grupo Editorial en Iberoamérica.